

Séquence 1 – Les nombres relatifs

Objectifs

1. Calculer avec des nombres relatifs (somme, différence, produit, quotient)
2. Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur
3. Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté

Brahmagupta - Indien (598 ; 660)



Brahmagupta est né en 598 au nord-ouest de l'Inde, à Multan, aujourd'hui au Pakistan.

Il est le premier à présenter, par des calculs de pertes et de profits, des règles sur les nombres négatifs et à définir le zéro comme la différence d'un nombre par lui-même.

Dans les règles d'arithmétique qu'il établit, les nombres positifs s'attachent à un bien et les nombres négatifs à une dette :

- Zéro soustrait d'une dette est une dette.
- Zéro soustrait d'un bien est un bien.
- Zéro soustrait de zéro est zéro.
- Une dette soustraite de zéro est un bien.
- Un bien soustrait de zéro est une dette.
- Le produit de zéro multiplié par une dette ou un bien est zéro.
- Le produit de zéro multiplié par zéro est zéro.
- Le produit ou le quotient de deux biens est un bien.
- Le produit ou le quotient de deux dettes est un bien.
- Le produit ou le quotient d'une dette et d'un bien est une dette.
- Le produit ou le quotient d'un bien et d'une dette est une dette.

Brahmagupta traite également des nombres irrationnels.

Il présente encore une méthode de calcul semblable à celle utilisée de nos jours pour poser les multiplications.

Il détermine également une méthode de calcul du volume d'un prisme.

Il présente les longitudes des planètes, étudie leur rotation journalière, leurs positions, pose des problèmes d'éclipses solaires et lunaires et estime la durée d'une année à 365 jours, 6 heures, 5 minutes et 19 secondes.

1 Addition, soustraction de nombres relatifs

a) Calcul de la somme de deux nombres relatifs

PROPRIÉTÉ La somme de deux nombres relatifs de même signe est un nombre relatif qui a :

- pour signe, le signe commun aux deux nombres ;
- pour distance à zéro, la somme des distances à zéro.

■ **EXEMPLES :** • $(+7) + (+8) = +15$

Les nombres sont positifs.

Le résultat est donc positif.

$$7 + 8 = 15$$

• $(-4,3) + (-9,4) = -13,7$

Les nombres sont négatifs.

Le résultat est donc négatif.

$$4,3 + 9,4 = 13,7$$

PROPRIÉTÉ La somme de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre relatif qui a :

- pour signe, le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
- pour distance à zéro, la différence des distances à zéro.

■ **EXEMPLES :** • $(+7) + (-9) = -2$

$$9 > 7$$

(-9) a la plus grande distance à zéro.

Le résultat est donc négatif.

$$9 - 7 = 2$$

• $(-3,5) + (+8,6) = +5,1$

$$8,6 > 3,5$$

$(+8,6)$ a la plus grande distance à zéro.

Le résultat est donc positif.

$$8,6 - 3,5 = 5,1$$

b) Calcul de la différence de deux nombres relatifs

PROPRIÉTÉ Soustraire un nombre relatif revient à ajouter son opposé.

■ **EXEMPLES :** • $(-5) - (+8) = (-5) + (-8) = -13$

Pour soustraire $+8$, on ajoute -8 .

• $(-9) - (-5,4) = (-9) + (+5,4) = -3,6$

Pour soustraire $-5,4$, on ajoute $+5,4$.

c) Calcul d'une expression algébrique

MÉTHODE Pour calculer une expression algébrique :

- on commence par transformer les soustractions en additions ;
- on ajoute les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux ;
- on ajoute les deux nombres restants.

■ **Remarque :** Pour calculer une expression algébrique, on peut aussi simplifier son écriture.

■ **EXEMPLE :**

$$A = (-12) + (+7) - (+8) + (-5) - (-9)$$

$$A = (-12) + (+7) + (-8) + (-5) + (+9)$$

$$A = (+7) + (+9) + (-12) + (-8) + (-5)$$

$$A = (+16) + (-25)$$

$$A = -9$$

Écriture simplifiée

$$A = -12 + 7 - (+8) - 5 - (-9)$$

$$A = -12 + 7 - 8 - 5 + 9$$

$$A = -12 + 7 - 8 - 5 + 9$$

$$A = 16 - 25$$

$$A = -9$$

II. Multiplication de nombres relatifs

A. Produit de deux facteurs

Propriété :

a désigne un nombre relatif.

Le produit du nombre a par (-1) est égal à du nombre a .

L'opposé du nombre a se note

$$a \times (-1) = (-1) \times a = -a$$

Propriété :

Le produit de deux nombres relatifs

La distance à zéro de ce produit est égale au produit des distances à zéro.

Exemple:

$$(-7,5) \times 6 = -45$$

Propriété :

Le produit de deux nombres relatifs

La distance à zéro de ce produit est égale au produit des distances à zéro.

Exemples :

$$2,5 \times 1,5 = 3,75$$

$$(-9) \times (-13) = 117$$

Voici un moyen mnémotechnique pour déterminer le signe d'un produit de deux facteurs :

règle des signes d'un produit	{	« plus »	par	« plus »	donne	« plus »
		« moins »	par	« moins »	donne	« plus »
		« moins »	par	« plus »	donne	« moins »
		« plus »	par	« moins »	donne	« moins »

Remarque :

Pour calculer astucieusement un produit de plusieurs nombres relatifs, on peut changer l'ordre des facteurs.

Exemple :

$$\begin{aligned} & 0,125 \times (-4) \times 5 \times (-6,5) \times (-20) \times (-25) \times 8 \\ & = 0,125 \times 8 \times (-4) \times (-25) \times 5 \times (-20) \times (-6,5) \\ & = 1 \times 100 \times (-100) \times (-6,5) \\ & = 10000 \times 6,5 \\ & = 65000 \end{aligned}$$

B. Produit de plusieurs facteurs

Méthode :

Pour déterminer le signe d'un produit de plusieurs facteurs,

.....

Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est

.....

Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est

.....

Exemple:

$$A = (-8) \times (-7) \times 5,5 \times (-0,25) \times 2,3$$

L'expression A est un produit qui comporte 3 facteurs négatifs.

Le nombre 3 est impair, donc le nombre A est négatif :

$$A = -(8 \times 7 \times 5,5 \times 0,25 \times 2,3) = -177,1$$

Exemple:

$$B = 17 \times (-4) \times (-6,5) \times (-25) \times 8,7 \times (-3)$$

L'expression B est un produit qui comporte 4 facteurs négatifs.

Le nombre 4 est pair, donc le nombre B est positif :

$$B = 17 \times 4 \times 6,5 \times 25 \times 8,7 \times 3 = 288\,405$$

III. Division de nombres relatifs

A. Division de deux facteurs

Propriété :

Le quotient de deux nombres relatifs

La distance à zéro de ce quotient est égale au quotient des distances à zéro.

Exemple:

$$(-42) \div 6 = -(42 \div 6) = \frac{-42}{6} = \frac{42}{-6} = -\frac{42}{6} = -7$$

Propriété :

Le quotient de deux nombres relatifs

La distance à zéro de ce quotient est égale au quotient des distances à zéro.

Exemple:

$$(-4) \div (-5) = 4 \div 5 = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

B. Division de plusieurs facteurs

Méthode :

Pour déterminer le signe d'un produit/quotient de plusieurs facteurs,

.....

Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est

.....

Lorsque le nombre de facteurs négatifs de ce produit est

.....

Exemple:

$$A = (-800) \div (-5) \div (-0,25) \div 2$$

L'expression A est un quotient qui comporte 3 facteurs négatifs.

Le nombre 3 est impair, donc le nombre A est négatif :

$$A = -(800 \div 5 \div 0,25 \div 2) = -320$$

On peut aussi l'écrire sous forme de fraction :

$$A = -\frac{800}{5 \times 0,25 \times 2} = -320$$

Exemple:

$$B = 17 \div (-4) \times (-6,5) \times (-25) \times 8,7 \div (-3)$$

L'expression B comporte 4 facteurs négatifs.

Le nombre 4 est pair, donc le nombre B est positif :

$$B = 17 \div 4 \times 6,5 \times 25 \times 8,7 \div 3 = 2002,8125$$

On peut aussi l'écrire sous forme de fraction :

$$B = 17 \times 6,5 \times 25 \times 8,7 \div 4 \div 3 = \frac{17 \times 6,5 \times 25 \times 8,7}{4 \times 3} = 2002,8125$$